Dr.Herbert VOHLA:

Grundlagen der Gleichungslehre der Schulmathematik

1. GLEICHUNGEN bestehen aus Termen, die durch Relationszeichen verbunden sind. Unter "Term" versteht man eine mathematisch sinnvolle Anschreibung, die aus Zahlen (bzw. aus anderen rechenbaren Objekten, z.B. Vektoren, Matrizen usf.), Variablen und geeigneten Verknüpfungszeichen besteht.
Zu jedem Term gehört eine "Definitionsmenge" D , deren Elemente dem sogenannten Term einen eindeutigen Wert (auch im weiteren Sinn von Wertepaar, Vektor, ...) erteilen.
Für problemorientiertes Arbeiten mit Gleichungen ist es zweckmäßig, eine "Grundmenge" G festzulegen, in der nach Lösungen gesucht wird. Dies führt zu einer meist vorteilhaften Einschränkung der Grundmenge zu einer "Definitionsmenge" D in der Form $D \subseteqq G$.
Die häufigst verwendeten Relationszeichen sind "$=$", "$\neq$", "$<$", "$\leqq$", "$>$", "$\geqq$", "$\not\approx$".

2. LÖSEN einer Gleichung in einer gegebenen Grundmenge besteht darin, alle Elemente dieser Grundmenge ausfindig zu machen, die zu einer wahren Aussage im Belegungsfal führen. Es genügt grundsätzlich, die Elemente der zugehörigen Definitionsmenge zu untersuchen; Elemente aus G D führen zu Nichtaussagen.
Alle Elemente aus D, die wahre Aussagen ergeben, bilden die LÖSUNGSMENGE L.
Somit gilt: $L \subseteqq D \subseteqq G$.

3. GLEICHUNGSSYSTEME bestehen aus mehreren Gleichungen über einer gemeinsamen Grundmenge und sind aussagenlogisch miteinander verbunden. Z.B. ist ein "Linearsystem" eine konjunktiv gebundene Serie von linearen Gleichungen; beim Lösen von quadratischen Gleichungen in einer Variablen spricht man am Ende des Rechenvorgangs von einem "disjunktiv gebundenem Gleichungspaar" usf.

4. In der gehobenen Schulmathematik treten gelegentlich Gleichungen auf, die nicht nur aus Termen aufgebaut sind, sondern aus mehr- bis unendlichvieldeutigen Ausdrücken (z.B.: $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = 1$, wenn das Rechnen mit Komplexen Zahlen verwendet wird, oder $\arcsin x = 3x$ oder $x = \ln 2$ u.v.a.m).

5. Es besteht ein wesentlicher Unterschied zwischen der Grundmenge, in der eine gegebene Gleichung gelöst werden soll und dem dabei verwendeten Arbeitsbereich. Es wäre z.B. völlig sinnlos (jedoch möglich), beim Lösen einer Gleichung in N nur natürliche Zahlen zuzulassen.
Merksatz: Die Grundmenge, in der man die Lösungsmenge einer Gleichung sucht, schränkt den Arbeitsbereich für den Lösungsvorgang nicht ein.

Einige Beispiele zur Erläuterung von Seite 1

Die im folgenden angeführten Durchrechnungen von Aufgaben sollen einen (bescheidenen) Einblick in die Vielfalt der Möglichkeiten zum Lösen von Gleichungen bieten.

1. Man löse $2x = 11$ in der Grundmenge N.

a) $(x=5) \Leftrightarrow (2x=10)$, somit gilt für alle $x \leqq 5$: $2x<11$,
$(x=6) \Leftrightarrow (2x=12)$, somit gilt für alle $x \geqq 6$: $2x>11$.
Es wurden hiemit alle natürlichen Zahlen auf Lösungseigenschaft geprüft;
Ergebnis: $L = \{\}$.

b) $2x-11 = 0$ ist eine algebraische Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten;
$V = \left\{\pm 1, \pm 11; \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{11}{2}\right\}$.
Keine der lösungsverdächtigen Zahlen ist Lösung; $L = \{\}$.

c) $(2x=11) \Leftrightarrow (x=\frac{11}{2})$, somit wäre die einzige Lösung $\frac{11}{2}$ in der Grundmenge Q.
Wegen $\frac{11}{2} \notin N$ ergibt sich: $L = \{\}$.

2. Man beweise für alle x aus R: $x^2-x+1 > 0$.

a) Nach der üblichen Methode, unter Verwendung von Q:
$x^2-x+1 > = 0$, $(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$, q.e.d.

b) Nachweis durch Fallunterscheidung, ohne Verwendung von Bruchzahlen:
Fall 1 ... $x = 0 : 1 > 0$, q.e.d.
Fall 2 ... $x > 0$: $x^2-x+1 > 0$
$(x-1)^2 + x > 0$
$(x-1)^2 > -x$, q.e.d.

Fall 3 ... $x < 0$: $x^2-x+1 > 0$
$(x+1)^2-3x > 0$
$(x+1)^2 > 3x$, q.e.d.

3. Man löse $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = 1$ in N .

Übliche Vorgangsweise:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} &= 1 - \sqrt{x-2} \quad \Big|\ (\ )^2 \\ x+1 &= 1 - 2.\sqrt{x-2} + x-2 \\ 2.\sqrt{x-2} &= -2 \quad \Big|\ :2;\ (\ )^2 \\ x-2 &= 1 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

a) Legt man den Arbeitsbereich "Reelle Zahlen" zugrunde, so lautet das Ergebnis:
$L = \{\}$ wegen $\sqrt{4} + \sqrt{1} = 1$ ... falsche Aussage.

b) Arbeitet man hingegen im Bereich der Komplexen Zahlen, so gilt $\sqrt{4} = \pm 2$ und $\sqrt{1} = \pm 1$; also ergibt von den 4 möglichen Kombinationen von Haupt- und Nebenwerten eine, nämlich $2 - 1 = 1$, eine wahre Aussage.
Ergebnis: $L = \{3\}$.

4. Löse $\sqrt{x+4i} + \sqrt{x-4} = 2$ in N.

Hier muß als Arbeitsbereich die Menge der Komplexen Zahlen gewählt werden.

Übliche Vorgangsweise: $\sqrt{x+4i} = 2 - \sqrt{x-4} \quad |\ (\ )^2$

$$x+4i = 4 - 4.\sqrt{x-4} + x-4 \quad |\ :4,\ (\ )^2$$

$$-1 = x - 4$$

$$x = 3\ ;\ L = \{3\}$$, weil die Probe stimmt.

Probe: $\sqrt{3+4i} + \sqrt{-1} = 2$ (man beachte: $3+4i = (2+i)^2$!)

$\pm(2+i) \pm i = 2$; die Kombination $(2+i) - i = 2$ ist eine wahre Aussage.

5. Die Ungleichung $3x + \frac{1}{x^3} \geqq 4$ ist zu beweisen für alle x aus R^+ .

a) "Übliche" Arbeitsmethode besteht darin, Nennerfreiheit zu erzeugen; man erhält $3x^4 - 4x^3 + 1 \geqq 0$. Dann erkennt man :

$$3x^4 - 4x^3 + 1 = (x-1)^2.(3x^2+x+1) \geqq 0\ ,\ \text{q.e.d.}$$

b) "Fortgeschrittene" Arbeitsmethode besteht darin, die Ungleichung $m_A \geqq m_G$ (m_A ... arithmetisches Mittel, m_G ... geometrisches Mittel zweier positiver Zahlen) einzusetzen.

$$3x + \frac{1}{x^3} = 2x + (x + \frac{1}{x^3}) \geqq 2.\sqrt{2x^2 + \frac{2}{x^2}} = 2.\sqrt{2}.\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} \geqq 2.\sqrt{2}.\sqrt{2} = 4\ ,\ \text{q.e.d.}$$

(Hiezu ist die Kenntnis des Satzes erforderlich: Positive Zahl plus ihr Kehrwert gibt zur Summe mindestens 2; genau 2 ergibt sich nur für die Zahl 1)

c) "Top"-Methode kann angewendet werden, wenn man weiß, daß $m_A \geqq m_G$ für beliebig viele positive Zahlen gilt. Also kann man dann rechnen:

$$3x + \frac{1}{x^3} = x + x + x + \frac{1}{x^3} \geqq 4.\sqrt[4]{x.x.x.\frac{1}{x^3}} = 4\ ,\ \text{q.e.d.}$$

d) "Analysis"-Arbeitsmethode erfordert Anwendung der Differentialrechnung. Man gründet die Funktion $f : y = 3x + \frac{1}{x^3}$ und ermittelt ihre Ableitungen: $f' : y' = 3 - \frac{3}{x^4}$, $f'' : y'' = \frac{12}{x^5}$. Es ergibt sich für mögliche Extremstellen $x=1$ mit $y''(1) = 12$. Weil f in R^+ (eindeutig) differenzierbar und daher stetig ist, folgt, daß 1 (mit $f(1)=4$) in R^+ die Stelle des absoluten Minimums ist.

Dieser Argumentation liegen viele Vorkenntnisse zugrunde.

Beweis für alle positiven Zahlen: $x + \frac{1}{x} \geqq 2$, wobei das Gleichheitszeichen nur für $x = 1$ gilt.

$$(x-1)^2 \geqq 0 \iff x^2-2x+1 \geqq 0 \iff x^2+1 \geqq 2x \iff x + \frac{1}{x} \geqq 2\ ,\ \text{q.e.d.}$$

Beachte: Wegen x aus R^+ ist die Division durch x eine Äquivalenzumformung.

6. Eine zweiziffrige natürliche Zahl mit der Ziffernsumme 11 hat die Eigenschaft, zu einer um 27 größeren Zahl zu werden, wenn man ihre Ziffern vertauscht. Um welche Zahl handelt es sich ?

a) Üblicher Vorgang zum Lösen der Aufgabe mithilfe einer Gleichung:
x stehe für die noch unbekannte Einerziffer, also kann man 11-x für die ebenfalls unbekannte Zehnerziffer setzen.
Ansatz laut Text: $10.(11-x) + x = 10x + (11-x) - 27$, ... , $x=7$; $L = \{7\}$.
Ergebnis: Die gesuchte (und mittels einer Gleichung gefundene Zahl) ist **47** .

b) Kombinatorische Methode zum Lösen der Aufgabe:

n(ZS=11)	$\overline{n}$(vert.Z.)	$\overline{n}$ - n
29	92	63
38	83	45
47	74	27
56	65	9
65	56	-9
74	47	-27
83	38	-45
92	29	-63

Ergebnis:
Die gesuchte (und mittels kombinatorischer Methode gefundene) Zahl ist 47.

7. Bekannt ist $\frac{\cancel{6}4}{1\cancel{6}} = \frac{4}{1}$ ... wahre Aussage ("/" bedeutet Wegstreichen einer Ziffer).
Ermittle alle zweiziffrigen natürlichen Zahlen (aus verschiedenen Ziffern) mit dieser Eigenschaft.
Beim Lösen dieser Aufgabe hilft zunächst das Aufstellen einer geeigneten Gleichung; dann empfiehlt sich kombinatorisches Lösen.

$\frac{(\cancel{x},z)}{(y,\cancel{x})} = \frac{z}{y}$ führt auf $(10x+z).y = (10y+x).z$, ... , $z = \frac{10xy}{x+9y}$.

x=1:

y	10xy	x+9y	z ∈ N
1	10	10	(1)
2	20	19	-
3	30	28	-
4	40	37	-
5	50	46	-
6	60	55	-
7	70	64	-
8	80	73	-
9	90	82	-

....

x=6:

10xy	x+9y	z ∈ N
60	15	4
120	24	5
180	33	-
240	42	-
300	51	-
360	60	(6)
420	69	-
480	78	-
540	87	-

....

x=9:

10xy	x+9y	z ∈ N
90	18	5
180	27	-
270	36	-
360	45	8
450	54	-
540	63	-
630	72	-
720	81	-
810	90	(9)

Ergebnis: $\frac{64}{16}$, $\frac{65}{26}$, $\frac{95}{19}$, $\frac{98}{49}$.

8. Welche zweiziffrige natürliche Zahl hat die Eigenschaft, daß die Summe der Kuben ihrer Ziffern gleich dem Produkt dieser Zahl mit ihrer Ziffernsumme ist ?

Es stehe x für die Zehnerziffer, y für die Einerziffer der gesuchten Zahl. Daraus ergibt sich der Ansatz: $x^3 + y^3 = (10x+y).(x+y)$; dies führt zu einer Weiterrechnung in Hinblick auf die explizite Form z.B. bezüglich y:

$$x^2 - x.y + y^2 = 10x + y, \quad y^2 - y.(x+1) + x^2 - 10x = 0 \; ;$$

$$y = \frac{x+1 \pm \sqrt{1+42x-3x^2}}{2} \; .$$

Nun kann man kombinatorisch weitererarbeiten:

x	$1+42x-3x^2$	$\sqrt{1+42x-3x^2} \in N$	$y \in N$
1	40	-	-
2	73	-	-
3	100	10	7
4	121	11	8
5	136	-	-
6	145	-	-
7	148	-	-
8	145	-	-
9	136	-	-

Ergebnis:

Es handelt sich um die Zahlen 37 und 48 .

9. In einer Urne sind schwarze und weiße Kugeln.

Wieviel von jeder Farbe sind drinnen, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man nach 5-maligem Ergreifen einer Kugel (ohne Zurücklegen) 5 schwarze Kugeln hat, genau $\frac{1}{2}$ ist ?

Man setze x für die Anzahl der schwarzen und y für die der weißen Kugeln.

Der Ansatz lautet somit: $\frac{1}{2} = \frac{x}{x+y} \cdot \frac{x-1}{x+y-1} \cdot \frac{x-2}{x+y-2} \cdot \frac{x-3}{x+y-3} \cdot \frac{x-4}{x+y-4}$; daraus:

$$(x+y).(x+y-1).(x+y-2).(x+y-3).(x+y-4) = 2.x.(x-1).(x-2).(x-3).(x-4)$$

$$\text{bzw.:} \quad \binom{x+y}{5} = 2.\binom{x}{5} \; .$$

Hier beginnt man mithilfe des PASCALschen Dreiecks das kombinatorische Lösen.

```
                 1
               1   1
             1   2   1                 (n über 5)
           1   3   3   1
         1   4   6   4   1
       1   5  10  10   5   1
     1   6  15  20  15   6   1
   1   7  21  35  35  21   7   1
  1  8  28  56  70  56  28  8  1
 1  9  36  84  126 126  84  36  9  1
1 10  45 120 210 252 210 120  45 10  1
```

Man erkennt also:

$\binom{10}{5} = 2.\binom{9}{5}$;

Ergebnis:

In der Urne waren 9 schwarze und eine weiße Kugel.

10. Löse $8x + 13y = 181$ in $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Berechne dann alle Gitterpunkte der Lösungsmenge in den 4 Quadranten und ermittle alle Gitterpunkte, deren Entfernung von $P(4/5)$ nicht größer als 15 ist.

a)

$$y = \frac{181-8x}{13} = 13 + \underbrace{\frac{12-8x}{13}}_{=a}$$
$$x = \frac{12-13a}{8} = 1-a + \underbrace{\frac{4-5a}{8}}_{=b}$$
$$a = \frac{4-8b}{5} = -b + \underbrace{\frac{4-3b}{5}}_{=c}$$
$$b = \frac{4-5c}{3} = 1-c + \underbrace{\frac{1-2c}{3}}_{=d}$$
$$c = \frac{1-3d}{2} = -d + \underbrace{\frac{1-d}{2}}_{=e}$$
$$d = 1-2e$$

$$y = 13-4+8e = 9+8e$$
$$x = 1+4-8e+3e-5 = 8-13e$$
$$a = -3+5e-1+3e = -4+8e$$
$$b = 1+1-3e+1-2e = 3-5e$$
$$c = -1+2e+e = -1+3e$$

$$L = \{(8-13e/9+8e)\}, \quad e \in \mathbb{Z}.$$

b) Q_1: $(8-13e>0) \wedge (9+8e>0)$

$(e<\frac{8}{13}) \wedge (e>-\frac{9}{8})$

$-1 \leqq e \leqq 0$

$L_e = \{-1;0\}$,

$L_1 = \{(8/9),(21/1)\}$.

Q_2: $(8-13e<0) \wedge (9+8e>0)$

$(e>\frac{8}{13}) \wedge (e>-\frac{8}{9})$

schärfere Ungl.

$L_e = \{1;2;3;\ldots\}$,

$L_2 = \{(-5/17),(-18/25),(-31/33),\ldots\}$.

Q_3: $(8-13e<0) \wedge (9+8e<0)$

$(e>\frac{8}{13}) \wedge (e<-\frac{9}{8})$

$L_e = \{\}$,

$L_3 = \{\}$.

Q_4: $(8-13e>0) \wedge (9+8e<0)$

$(e<\frac{8}{13}) \wedge (e<-\frac{9}{8})$

schärfere Ungl.

$L_e = \{-2;-3;-4;\ldots\}$,

$L_4 = \{(34/-7),(47/-15),(60/-23),\ldots\}$.

c) Ansatz: $(8-13e-4)^2 + (9+8e-5)^2 \leqq 15^2, \ \ldots \ , \ 233e^2-40e \leqq 193$,

$$e^2 - \frac{40}{233}e \leqq \frac{193}{233} \quad \Big| + \left(\frac{20}{233}\right)^2$$

$$\left(e - \frac{20}{233}\right)^2 \leqq \left(\frac{213}{233}\right)^2, \text{ also :}$$

$$-\frac{213}{233} \leqq e - \frac{20}{233} \leqq \frac{213}{233} \quad \text{bzw.} \quad -\frac{193}{233} \leqq e \leqq 1 \text{ mit } L_e = \{0;1\}.$$

Die gesuchten Gitterpunkte sind: $Q(3/9)$, $R(-5/17)$.

d) Kombinatorisches Lösen: Man stelle i.d.F. zweckmäßigerweise die explizite Form bezüglich x her: $x = \frac{181-13y}{8}$ und verwende dann für y aufeinanderfolgende ganze Zahlen. Spätestens beim 8. Versuch (wegen des Nenners 8) ergibt sich ein ganzzahliger x-Wert.

Die angeführten rationalen Gleichungen sind in R zu lösen. Als Arbeitsbereich genügt ebenfalls R. Zu beachten ist in allen Fällen die Definitionsmenge.

1. $\frac{x+1}{x-2} + \frac{x+5}{x-3} = \frac{2(x^2+x-8)}{x^2-5x+6}$

2. $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x-2}{x+2} = \frac{2x^2+x-2}{x^2+3x+2}$

3. $\frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{2}{x^2-5x+6} = \frac{2}{x^2-4x+3}$

4. $\frac{5}{x^2+x-6} + \frac{1}{x^2+7x+12} = \frac{6}{x^2+2x-8}$

5. $\frac{5x-7}{x+5} + \frac{7x+5}{x-7} + \frac{2x-374}{x^2-2x-35} = 0$

6. $\frac{x+1}{2x-1} + \frac{x+2}{x-1} = \frac{3(x+3)}{2x^2-3x+1}$

7. $\frac{x+3}{x^2+3x+2} + \frac{x-6}{x^2+5x+6} + \frac{x-3}{x^2+4x+3} = 0$

8. $\frac{x+1}{6x^2-17x+12} + \frac{x+1}{12x^2-31x+20} + \frac{x+2}{3x^2-22x+15} = 0$

9. $\frac{2x+3}{x+1} + \frac{3x-2}{x-1} = \frac{6x^2-x-3}{x^2-1}$

10. $\frac{x+3}{x-1} + \frac{x-2}{x+2} = 3.\frac{x^2+x+2}{x^2+x-2}$

11. $\frac{x+1}{x^2+x-6} + \frac{x-9}{x^2+3x-10} + \frac{x+9}{x^2+8x+15} = 0$

12. $\frac{x+5}{2x^2-x-6} + \frac{x+1}{6x^2+7x-3} + \frac{x-7}{3x^3-7x+2} = 0$

13. $\frac{3x+4}{2x+5} + \frac{2x-5}{3x-4} = \frac{7(x^2-x-3)}{6x^2+7x-20}$

14. $\frac{x^2-2}{x^2-6x+8} + \frac{x^2+1}{x^2+x-6} + \frac{x^2-11}{x^2-x-12} = 0$

15. $\frac{2x^2+1}{2x-1} + \frac{x(x+2)}{3x-2} = \frac{2(x^2+3x-1)}{6x^2-7x+2}$

16. $\frac{4x^2-23}{8x^2+10x-3} + \frac{4(x^2+1)}{6x^2+5x-6} + \frac{4(x^2-1)}{12x^2-11x+2} = 0$

Lösungen:

1. $\{\}$ 2. $\{\}$ 3. $\{\}$ 4. D 5. $\{5\}$ 6. $\{-2;2\}$

7. $\{1\}$ 8. $\{-1\frac{1}{3}\}$ 9. $\{2\}$ 10. $\{\}$ 11. $\{2\frac{2}{3}\}$ 12. $\{-2\frac{1}{3}\}$

13. $\{\}$ 14. $\{1;-2\}$ 15. $\{-\frac{5}{8};0;1\}$ 16. $\{\frac{5}{6}\}$

Nachbemerkung für Liebhaber von Maschinenzahlen: Die Gleichung $x^2-2 = 0$ ist in der Menge der Zehntelzahlen und in der Menge der Zehntausendstelzahlen exakt lösbar !

Lösen von Gleichungen (Ungleichungen) durch Klasseneinteilung der Grundmenge

Beispiel A: $\frac{2x-5}{x-2} \leqq 1$ **ist in R zu lösen.**

$K_1 = \{x/x \leqq 2\}$: $2x-5 \geqq x-2,\ x \geqq 3$; $L_1 = \{\}$.
$K_2 = \{x/x > 2\}$: $2x-5 \leqq x-2$, $x \leqq 3$; $L_2 =]2;3]$.

$$L = L_1 \cup L_2 =]2;3] .$$

Beispiel B: $\frac{x^2-4x+1}{x^2-2x-3} < \frac{1}{2}$ ist in R zu lösen.

Die Faktorisierung des Nenners $x^2-2x-3 = (x-3).(x+1)$ führt auf die folgende Klasseneinteilung:

$K_1 = \{x/x \leqq -1\}$: $2x^2-8x+2 < x^2-2x-3,\ \ x^2-6x < -5,\ (x-3)^2 < 4,$
$-2 < x-3 < 2,\ 1 < x < 5;\ \ L_1 = \{\}$
$K_2 = \{x/-1<x \leqq 3\}$: ... $(x-3)^2>4,\ (x-3<-2) \vee (x-3>2),\ (x<1) \vee (x>5);$
$L_2 =]-1;1[$
$K_3 = \{x/3<x\}$: (wie bei K_1) ... $1<x<5$; $L_3 =]3;\infty[$

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 =]-1;1[\cup]3;\infty[.$$

Beispiel C: $x^2 - 3|x| + 2 = 0$ ist in R zu lösen.

1. Lösungsweg (durch Klasseneinteilung der Grundmenge):

$K_1 = \{x/x<0\}$: $x^2+3x+2 = 0,\ \ldots,\ (x=-2) \vee (x=-1);\ \ L_1 = \{-2;-1\}$
$K_2 = R_0^+$: $x^2-3x+2 = 0,\ \ldots,\ (x=1) \vee (x=2),\ \ L_2 = \{1;2\}$

$$L = L_1 \cup L_2 = \{-2;-1;1;2\} .$$

2. Lösungsweg (durch Quadrieren; also durch Herstellen einer algebraischen Gleichung):

$3.|x| = x^2 + 2$, durch Quadrieren und wegen $|x|^2 = x^2$ ergibt sich:
$9x^3 = x^4+4x^2+4$ bzw. $x^4-5x^2+4 = 0,\ \ldots,\ (x^2=1) \vee (x^2=4);$

$$L = \{-2;-1;1;2\} .$$

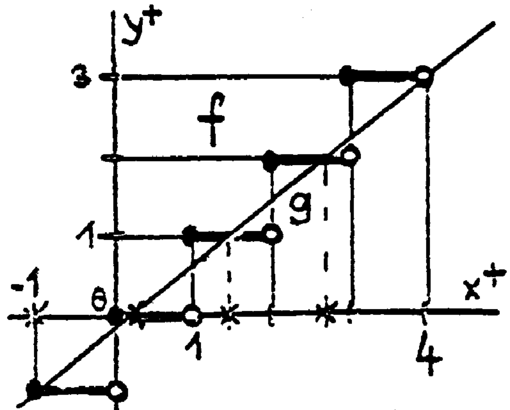
Weitere Beispiele:

1. $\frac{x^2+2x-3}{x^2-x-6} \leqq \frac{1}{2}$ 2. $\frac{x^4-4}{x^4-10x^2+9} > 1$ 3. $|x| + |x-2| = 3$

4. $|x+2| + |x+1| + |2x-5| = x^2-3x+8$ 5. $x.|x| - 10x + 24 = 0$

6. $2 \leqq |x| + |x+1| < 3$ 7. $x^2 + 2x = \operatorname{sgn} x$

Lösen von Gleichungen in einer Variablen, die GAUSS-Klammerterme enthalten.



Aufgabe: Man löse $5.[x] + 1 = 4x$ in R .

a) Graphisches Lösen

Man bilde die explizite Form bez. x :

$$[x] = \frac{4x-1}{5}$$ und betrachte die linke sowie die rechte Seite der Gleichung als erzeugenden Term je einer Funktion f und g.

Die durch Arbeiten mit Ähnlichkeitsabbildungen geschulte Anschauung läßt mithilfe der gemeinsamen Punkte beider Graphen erkennen:

$$L = \left\{-1;\ \frac{1}{4};\ 1\frac{1}{2};\ 2\frac{3}{4}\right\} .$$

b) Lösen durch Klasseneinteilung der Grundmenge:

$K_1 = [-2;-1[$: $5.(-2)+1 = 4x$, $4x = -9$, $x = -2\frac{1}{2}$; $L_1 = \{\}$

$K_2 = [-1;0[$: $5.(-1)+1 = 4x$, $4x = -4$, $x = -1$; $L_2 = \{-1\}$

$K_3 = [0;1[$: $5.0+1 = 4x$, $x = \frac{1}{4}$; $L_3 = \{\frac{1}{4}\}$

$K_4 = [1;2[$: $5.1+1 = 4x$, $4x = 6$, $x = \frac{3}{2}$; $L_4 = \{1\frac{1}{2}\}$

$K_5 = [2;3[$: $5.2+1 = 4x$, $4x = 11$, $x = \frac{11}{4}$; $L_5 = \{2\frac{3}{4}\}$

$K_6 = [3;4[$: $5.3+1 = 4x$, $4x = 16$, $x = 4$; $L_6 = \{\}$

$$L = \left\{-1;\ \frac{1}{4};\ 1\frac{1}{2};\ 2\frac{3}{4}\right\} .$$

Bemerkung: In mathematischer Hinsicht ist das auf diese Art gewonnene Ergebnis nicht befriedigend !

c) Exakte Methode: Man setze $[x] = n$ mit $n \in Z$ und $x = n+\varepsilon$ mit $0 \leq \varepsilon < 1$.

Durch Substitution erhält man:

$$5n+1 = 4.(n+\varepsilon)$$
$$5n+1 = 4n+4\varepsilon$$
$$n+1 = 4\varepsilon$$
$$\varepsilon = \frac{n+1}{4}$$

$$0 \leq \frac{n+1}{4} < 1$$
$$0 \leq n+1 < 4$$
$$-1 \leq n < 3$$

$$L_n = \{-1;\ 0;\ 1;\ 2\}$$
$$L_\varepsilon = \left\{0;\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{4}\right\}$$
$$L = \left\{-1;\ \frac{1}{4};\ 1\frac{1}{2};\ 2\frac{3}{4}\right\} .$$

Bemerkung: Mithilfe der vorstehend angeführten Lösungsmethode können auch kompliziertere Aufgaben gelöst werden;

z.B.: Man löse die Gleichung $x^2 = 2.[x]$ in R.

(Ergebnis: $L = \{0;\ \sqrt{2};\ 2\}$)

Gleichungen in einer Variablen mit einem reellen Formparameter, die in R zu lösen sind.

<u>Vorbemerkung:</u> Das Ziel der meisten Rechenverfahren für das Lösen von Gleichungen besteht darin, einfache Gleichungen (bzw. disjunktive Ketten davon) in der Form $ax = b$ herzustellen, die der gegebenen Gleichung wenn möglich äquivalent sind. Dabei sind 3 Grundformen zu unterscheiden:

(1) $x = \mu$ mit $\mu \in D$ .... $L = \{\mu\}$.
(2) $0.x = \mu$ mit $\mu \neq 0$ .... $L = \{\}$.
(3) $0.x = 0$ .... $L = D$.

Die folgenden Beispiele sollen diesen Sachverhalt erläutern.

<u>Aufgabe A:</u> Man löse $\frac{1}{x-1} + \frac{3}{x-a} - \frac{4}{x-2a} = \frac{2a^2+2a-84}{(x-1)(x-a)(x-2a)}$ in R; $a \in R$.

Zunächst: $D_x = R \setminus \{1;\ a;\ 2a\}$.

Durch Multiplikation der Gleichung mit $(x-1)(x-a)(x-2a)$ entsteht:

$(x-a)(x-2a)+3(x-1)(x-2a)-4(x-1)(x-a) = 2a^2+2a-84$ usf. .....

$x.(5a-1) = 84$.

Vor dem Herstellen der expliziten Form bez. x hat die Fallunterscheidung hinsichtlich a zu beginnen.

Fall 1: $\underline{a = \frac{1}{5}}$, die Gleichung hat die Form $0.x = 1$, also $L = \{\}$.

Fall 2: $a \neq \frac{1}{5}$, in diesem Fall kann dividiert werden ... $x = \frac{84}{5a-1}$;
allerdings sind nun wegen D Nebenrechnungen, die zu Unterfällen führen, erforderlich.

Fall 21: $\frac{84}{5a-1} = 1$, ... , $\underline{a = 17}$; $L = \{\}$.

Fall 22: $\frac{84}{5a-1} = a$, ... , $5a^2-a-84 = 0$ mit $\underline{(a=-4)} \vee \underline{(a=\frac{21}{5})}$; $L = \{\}$.

Fall 23: $\frac{84}{5a-1} = 2a$, ... , $10a^2-2a-84 = 0$, ... , $\underline{(a=-\frac{14}{5})} \vee \underline{(a=3)}$; $L = \{\}$.

Fall 3: $(a\neq-4) \wedge (a\neq-2\frac{4}{5}) \wedge (a\neq\frac{1}{5}) \wedge (a\neq3) \wedge (a\neq4\frac{1}{5}) \wedge (a\neq17)$ ... $L = \left\{\frac{84}{5a-1}\right\}$.

<u>Zusammenstellung des Ergebnisses</u> inform einer Klasseneinteilung bezüglich a :

(1) $(a=-4) \vee (a=-2\frac{4}{5}) \vee (a=\frac{1}{5}) \vee (a=3) \vee (a=4\frac{1}{5}) \vee (a=17)$ ..... $L = \{\}$

(2) $(a\neq-4) \wedge (a\neq-2\frac{4}{5}) \wedge (a\neq\frac{1}{5}) \wedge (a\neq3) \wedge (a\neq4\frac{1}{5}) \wedge (a\neq17)$ ..... $L = \left\{\frac{84}{5a-1}\right\}$.

Aufgabe 8: Man löse $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x-a} + \frac{a}{ax-1} = 0$ in R; $a \in R$.

Zunächst: $D_x = R \setminus \left\{1;\, a;\, \frac{1}{a}\right\}$.

Durch Multiplikation der Gleichung mit $(x-1)(x-a)(ax-1)$ entsteht:

$(x-a)(ax-1) - 2(x-1)(ax-1) + a(x-1)(x-a) = 0$ usf. ....

$$x.(2a^2-a-1) = a^2+a-2 \quad \text{bzw.} \quad x.(2a+1).(a-1) = (a+2).(a-1)$$

Vor dem Herstellen der expliziten Form bez. x hat die Fallunterscheidung hinsichtlich a zu beginnen.

Fall 1 $a=1$, Gleichung hat die Form $0.x=0$; $L = D = R\setminus\{1\}$ (!)

Fall 2: $a=-\frac{1}{2}$, Gleichung hat die Form $0.x=1$; $L = \{\}$.

Fall 3: $(a\neq 1) \wedge (a \neq -\frac{1}{2})$; in diesem Fall kann dividiert werden: $x = \frac{a+2}{2a+1}$;

allerdings sind wegen D Nebenrechnungen, die zu Unterfällen führen, erforderlich.

Fall 31: $\frac{a+2}{2a+1} = 1$, ..., $a = 1$; braucht nicht weiter untersucht zu werden (wegen $a\neq 1$ im Fall 3)

Fall 32: $\frac{a+2}{2a+1} = a$, ..., $a^2=1$, $a=-1$; ... $L = \{\}$.

Fall 33: $\frac{a+2}{2a+1} = \frac{1}{a}$, ..., $a^2=1$, $a=-1$; ... $L = \{\}$ (wie im Fall 32).

Fall 4: $(a\neq -1) \wedge (a \neq -\frac{1}{2}) \wedge (a \neq 1)$ ... $L = \left\{\frac{a+2}{2a+1}\right\}$.

Zusammenstellung des Ergebnisses inform einer Klasseneinteilung bezüglich a:

(1) $(a=-1) \vee (a=-\frac{1}{2})$ .... $L = \{\}$;

(2) $a = 1$ .... $L = R\setminus\{1\}$,

(3) $(a\neq -1) \wedge (a\neq -\frac{1}{2}) \wedge (a\neq 1)$ .... $L = \left\{\frac{a+2}{2a+1}\right\}$.

Interessante Nachbemerkung:

Jedermann, der weiß, was ein Quader ist, kennt auch die "Quadergleichung":

$$x^3 - \frac{K}{4}.x^2 + \frac{\mathcal{O}}{2}.x - V = 0$$

(K...Summe aller Kanten, $\mathcal{O}$...Oberfläche, V...Volumen)

Die Lösungen der Quadergleichung sind die Kantenlängen des zugehörigen Quaders. Wegen $\frac{K}{4} = \sqrt{D^2+\mathcal{O}}$ (D...Raumdiagonale) kommt man auch ohne K aus.

Unreeller Ratschlag:

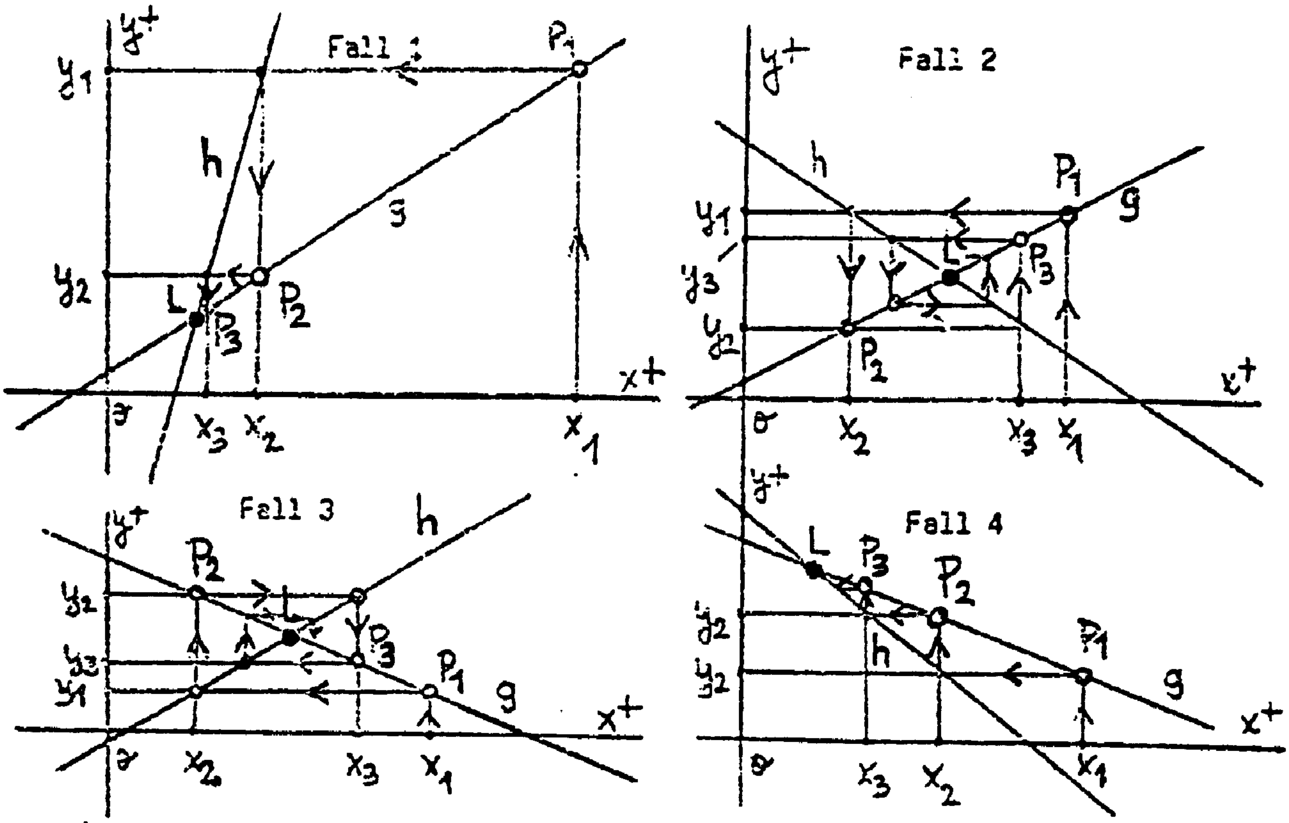
Man überprüfe den angeführten Sachverhalt an der Gleichung:

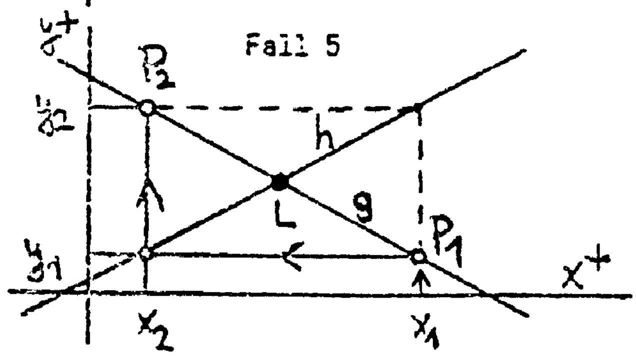
$x^3 - x^2 + x - 1 = 0$.

Iteratives Lösen von Linearsystemen mit 2 Variablen in $R \times R$.

Erörtert wird ein anschaulich leicht zu verstehendes Näherungsverfahren für lineare Gleichungssysteme der Form $\begin{matrix} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{matrix}$ mit Koeff.Det. $\neq 0$, sodaß eine eindeutige Lösung ermittelt werden kann.

Der Grundgedanke des Verfahrens ist im folgenden graphisch dargestellt; es müssen zunächst 5 Fälle unterschieden werden. Nicht dargestellt sind, weil das Lösungsverfahren gar nicht angewendet werden muß, jene Fälle, in denen eine oder beide Lösungsgeraden der einzelnen Gleichungen zu Koordinatenachsen parallel sind.





Die Fälle 1 bis 4 können zusammengefaßt werden mittels $|k_g| < |k_h|$,
im Fall 5 gilt $k_g + k_h = 0$.
(k ... Steigungszahlen der Geraden)

Lösungsvorgang:

Fall 1 - Fall 4: Man bilde die expliziten Formen von g bez. y und von h bez. x. Der Startwert x_1 liefert y_1 und somit P_1; mit y_1 erhält man aus h den Wert x_2, dann ergibt g den Wert y_2 und man hat P_2 usf. Die Folge der Punkte P_n auf g konvergiert gegen den Punkt L.

Fall 5: Man bilde eine explizite Form bez. y und die andere bez. x und berechne dann die beiden ersten Punkte P_1 und P_2. Der Mittelpunkt der Strecke P_1P_2 ist L.